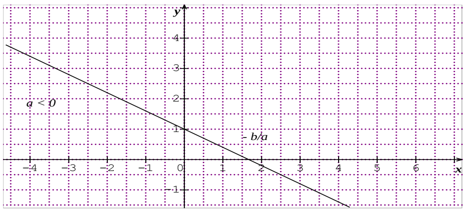
Formules et Techniques mathématiques à connaître le jour de la rentrée en 1ère Spé Maths

Fonctions

(1) **Fonction affine** f : $x \mapsto$ a x + b avec a ≠ 0 définie sur IR

f(x) = 0 admet une unique solution le réel $-\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ solution de l'équation a x + b = 0

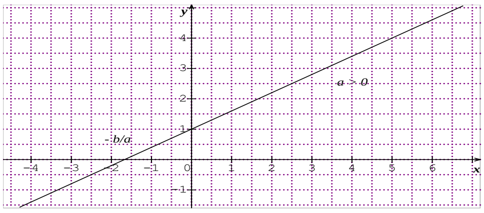
si **a < 0** alors f est **strictement décroissante** sur IR



Déduction du signe de a x + b

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de a x + b		+	0	–	

si **a > 0** alors f est **strictement croissante** sur IR



Déduction du signe de a x + b

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de a x + b		–	0	+	

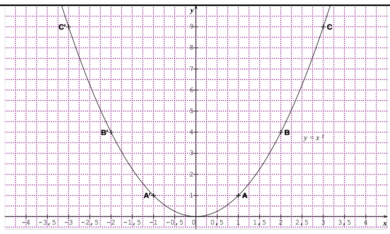
(2) **Fonction carré** f : $x \mapsto x^2$ définie sur IR.

strictement croissante sur l'intervalle [0 ; + ∞ [
strictement décroissante sur l'intervalle] - ∞ ; 0]

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x) = x^2		↘	0	↗	

Deux nombres positifs sont rangés dans **le même ordre** que leur carré : si **0** ≤ a < b alors $a^2 < b^2$
Deux nombres négatifs sont rangés dans **l'ordre contraire** de leur carré : si a < b ≤ **0** alors $a^2 > b^2$.

la courbe représentative de la fonction **carré** est appelée **une parabole** (P) de **sommet l'origine O** et **d'équation** **y = x^2**



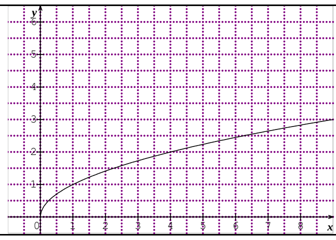
(3) **Fonction racine carrée** f : $x \mapsto \sqrt{x}$
définie sur **[0 ; + ∞[**

strictement croissante sur **[0 ; + ∞ [**

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x) = $\sqrt{x}$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Deux nombres et leurs deux racines carrées sont ordonnés dans le même ordre

la courbe représentative de la fonction **racine carrée** a pour équation y = $\sqrt{x}$.



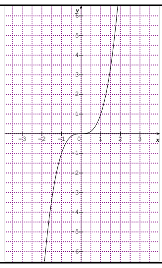
(4) **Fonction cube** f : $x \mapsto x^3$ définie sur IR

strictement croissante sur **] - ∞ ; + ∞ [**

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x) = x^3	↗	

Deux nombres et leurs deux cubes sont ordonnés dans le même ordre

la courbe représentative de la fonction **cube** a pour équation y = x^3



(5) **Fonction inverse** f : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

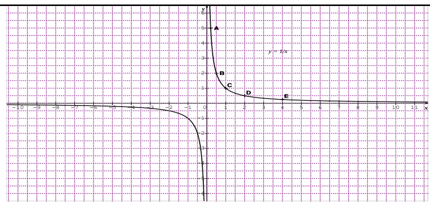
définie sur **IR* =] - ∞ ; 0 [∪] 0 ; + ∞ [.**
strictement décroissante sur] 0 ; + ∞ [et sur **] - ∞ ; 0 [**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f (x) = $\dfrac{1}{x}$		↘	‖	↘	

Deux nombres positifs sont rangés dans **l'ordre contraire** que leur inverse : si **0** < a < b alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

Deux nombres négatifs sont rangés dans **l'ordre contraire** de leur inverse: si a < b < **0** alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

la courbe représentative de la fonction **inverse** est appelée **une hyperbole** **d'équation y = $\dfrac{1}{x}$**



Maîtrise du Calcul algébrique

Expression algébrique

Développer un produit : c'est transformer ce produit en somme

Factoriser une somme : c'est transformer cette somme en produit

(6) **Distributivité simple** $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

(7) **Double distributivité** $(a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Attention à la règle des signes pour une multiplication

Identités remarquables (8) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (10) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(9) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Équations

Résoudre une équation d'inconnue x c'est déterminer **toutes** les valeurs de x pour lesquelles **l'égalité est vérifiée.**
Cet ensemble de valeurs est **l'ensemble des solutions** de l'équation. On peut le noté S_x.

Deux équations sont dites **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.
L'équivalence se symbolise par une double flèche : ⇔

(11) si $a \neq 0$ $ax + b = c$ $\Leftrightarrow ax + b - b = c - b$ $\Leftrightarrow ax = c - b$ $\Leftrightarrow \frac{ax}{a} = \frac{c-b}{a}$ $\Leftrightarrow x = \frac{c-b}{a}$ donc $S_x = \{\frac{c-b}{a}\}$	Lorsqu'on ajoute ou retranche un même nombre aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente. Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une équation par un même nombre non nul, on obtient une équation équivalente.

(12) Un produit est **nul** si et seulement si **un des facteurs** est **nul** soit : $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$

(13) **Le carré** d'une quantité est **nul** si et seulement si la quantité est nulle $A(x)^2 = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$

(14) **Un quotient** est **nul** si et seulement si **le numérateur est nul et le dénominateur n'est pas nul**

soit : $\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ **et** $B(x) \neq 0$ **on parle de valeur(s) interdite(s)**

(15) $x^2 = k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } k > 0 \text{ alors } x = \sqrt{k} \text{ ou } x = -\sqrt{k} \\ \text{si } k = 0 \text{ alors } x = 0 \\ \text{si } k < 0 \text{ alors } \textbf{aucune solution réelle} \end{cases}$ k étant un nombre réel.

(16) $\sqrt{x} = k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } k \geq 0 \text{ alors } x = k^2 \\ \text{si } k < 0 \text{ alors } \textbf{aucune solution réelle} \end{cases}$ k étant un nombre réel.

(17) $\frac{1}{x} = k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } k \neq 0 \text{ alors } x = \frac{1}{k} \\ \text{si } k = 0 \text{ alors } \textbf{aucune solution réelle} \end{cases}$ k étant un nombre réel.

Inéquations

Résoudre une inéquation d'inconnue x c'est déterminer **toutes** les valeurs de x pour lesquelles **l'inégalité est vérifiée.**
Cet ensemble de valeurs est **l'ensemble des solutions** de l'inéquation, c'est souvent un intervalle

$a < b$ $\Leftrightarrow a + c < b + c$ $\Leftrightarrow a - d < b - d$ si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$	(18) Lorsqu'on **ajoute ou retranche un même nombre aux deux** membres d'une inégalité, on obtient une inégalité équivalente c-à-d **le sens de cette inégalité ne change pas** (19) Ajouter membre à membre deux inégalités de **même sens** donne une inégalité **de même sens**
$a < b$ et $c > 0$ $\Leftrightarrow a \times c < b \times c$ $a < b$ et $c < 0$ $\Leftrightarrow a \times c > b \times c$	Lorsqu'on **multiplie ou divise** : (20) par **un même nombre strictement positif les deux** membres d'une inégalité, on **ne change pas le sens** de cette inégalité (21) par **un même nombre strictement négatif les deux** membres d'une inégalité, on **change le sens** de cette inégalité

idem avec > , ≤, ≥

Système de 2 équations à 2 inconnues

(22) **Résoudre** un système (E) c'est trouver **le ou les couples (x ; y)** de IR^2 **solutions des équations du système.** Il existe 3 méthodes différentes :

par substitution

D'une équation on déduit la valeur d'une inconnue en fonction de l'autre puis on substitue cette inconnue dans l'autre équation

par combinaison linéaire

On multiplie ou divise chaque équation par un nombre afin d'éliminer par addition ou soustraction une des inconnues

par un mixage des 2

Dans certains cas on « tombera » sur **des cas particuliers** :

- $0\,y$ = un réel non nul. C'est **impossible** donc l'ensemble des solutions est vide $S_x = \varnothing$
- $0\,y = 0$. Cette équation à une infinité de solutions du type (x ; a x + b) d'où $S_x = \{ (x;\ a\,x + b),\ x \in IR \}$

Vecteurs

A et B sont deux points du plan

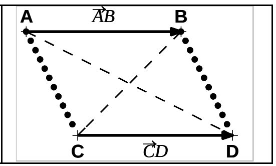
(23) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est définie par : sa direction (celle de la droite (AB))
son sens (de A vers B)
sa norme (la longueur du segment [AB]

(24) Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{BA}$ **= -** $\overrightarrow{AB}$

(25) Le vecteur nul $\vec{0}$ est défini par $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ =…

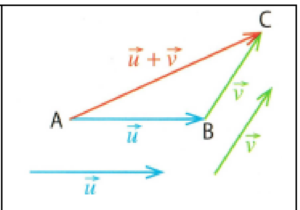
(26) ABDC est un parallélogramme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

On peut noter $\vec{u}$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$



(27) **Relation de Chasles l'égalité :** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
où A, B et C sont trois points quelconques

La somme des vecteurs $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$**,** notée $\vec{u} + \vec{v}$**,** est **le vecteur** $\overrightarrow{AC}$
si $\vec{u}$ **=** $\overrightarrow{AB}$ **et** $\vec{v}$ **=** $\overrightarrow{BC}$



(28) pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

et pour tous réels k et k'

$k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\,\vec{v}$

$(k + k')\,\vec{u} = k\,\vec{u} + k'\,\vec{u}$

$(k\,k')\,\vec{u} = k\,(k'\,\vec{u}) = k'\,(k\,\vec{u})$

Géométrie repérée

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,,\ \vec{j})$: $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ A ($x_A\,;y_A$) et B ($x_B\,;y_B$)

(29) $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

égalité : $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

somme : $\vec{u} + \vec{v}$ $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

produit par un réel : $\mathbf{k}\vec{u}$ $\begin{pmatrix} \mathrm{k}\,x \\ \mathrm{k}\,y \end{pmatrix}$

déterminant : $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \boldsymbol{x\,y' - y\,x'}$

(31) Si le repère est orthonormé : Norme $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

(33) Deux vecteurs **non nuls** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\Leftrightarrow$ ils ont **la même direction** c-à-d

$\Leftrightarrow$ **il existe un nombre réel k,** tel que $\vec{v}$ **= k** $\vec{u}$

$\Leftrightarrow$ **det(**$\vec{u}\,,\vec{v}$**) = 0**

(34) Tout vecteur, **non nul**, $\vec{u}$ qui possède **la même direction qu'une droite d** du plan est appelé **vecteur directeur de (d)**.

Tous les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ sont des vecteurs directeurs de (d)
Une droite à donc une infinité de vecteurs directeurs tous colinéaires entre eux.

(35) La droite (d), passant par le point A et de vecteur directeur non nul $\vec{u}$, est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

(30) A ($x_A\,;y_A$) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = x_A\,\vec{i} + y_A\,\vec{j}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

milieu du segment [AB] : **K (** $\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\dfrac{y_A + y_B}{2}$ **)**

(32) Si le repère est orthonormé :
$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

(36) Trois points **A, B et C sont alignés**
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{AC}$ **sont colinéaires**
$\Leftrightarrow$ **det(**$\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}$**) = 0**

(37) Deux droites **(AB) et (CD) sont parallèles**
$\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{CD}$ **sont colinéaires**
$\Leftrightarrow$ **det(**$\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}$**) = 0**

(38) Coefficient directeur (ou encore la pente) de la droite (AB) :
$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ avec $x_A \neq x_B$

(39) $\boldsymbol{y = m\,x + p}$ est **l'équation réduite** de (AB) et dans ce cas elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

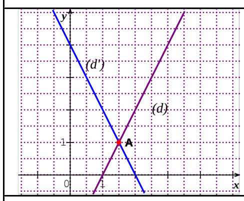
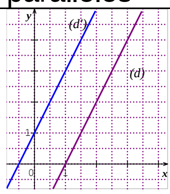
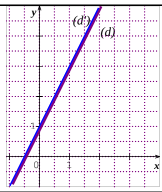
m est **le coefficient directeur** de (d) ou encore la pente de (d)
p est **son ordonnée à l'origine**

un de ses vecteurs directeurs est $\vec{u}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$

(40) a x + b y + c = 0 est **une équation cartésienne** de la droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} \mathbf{-\,b} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$ on suppose que (a ;b) ≠ (0 ;0)

(41) $\boldsymbol{x}$ **= c** où c est un réel est l'équation d'une droite (d) **parallèle à l'axe des ordonnées**
Ses vecteurs directeurs sont colinéaires au vecteur $\vec{j}$.

(42) Soient deux droites (d) a x + b y + **c** = 0 et (d') a' x + b' y + **c'** = 0

<table>
<tr><td>Si a b' – a' b ≠ 0
les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ ne sont pas colinéaires</td><td colspan="2">Si a b' – a' b = 0
les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ sont colinéaires</td></tr>
<tr><td>(d) et (d') sont sécantes</td><td>(d) et (d') sont strictement parallèles</td><td>(d) et (d') sont confondues</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(Z) a une unique solution le couple des coordonnées de A intersection de (d) et (d')
$S_Z = \{ (x_A\,;\,y_A) \}$</td><td>(Z) n'a aucune solution
$S_Z = \varnothing$</td><td>(Z) a une infinité de solutions, tous les couples vérifiant
a x + b y = c
S_Z = { (x ; y) tel que a x + b y = c }</td></tr>
</table>

Annexe Maîtrise du Calcul

Écriture fractionnaire

a étant un nombre réel **non nul :**

a et $\frac{1}{a}$ sont inverses : $\frac{1}{a}$ est l'inverse de a, et, a est l'inverse de $\frac{1}{a}$ l'inverse de l'inverse de a est : $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

Opération avec deux écritures fractionnaires :

(100) Pour les additionner ou les soustraire elles doivent avoir le même dénominateur :

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ ou $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ avec $c \neq 0$ sinon $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{a\,d + c\,b}{bd}$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

(200) Pour les multiplier, on multiplie les numérateurs entre eux, et les dénominateurs entre eux :

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ cas particulier $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

(300) Pour les diviser il faut multiplier la première par l'inverse de la deuxième :

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ cas particulier $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$ avec $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$

On simplifiera toujours au maximum la réponse jusqu'à l'écriture irréductible.

Puissances entières

(400) Pour tout entier naturel n non nul et le réel a : $\underbrace{a \times a \times a \ldots\ldots \times a}_{n \text{ fois}} = a^n$

(500) Pour tout $a \neq 0$, **l'inverse de a^n** se note a^{-n} soit $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

(600) cas particuliers : $a^1 = a$ et $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (7) par convention pour $a \neq 0$ $a^0 = 1$

Dans les formules suivantes soient **a et b des réels non nuls, n et p des entiers relatifs** (ensemble Z).

(800) Produit de puissances: $a^n \times a^p = a^{n+p}$ (9) Puissance de puissances: $(a^n)^p = (a^p)^n = a^{np}$

(1000) Quotient de puissances: $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} = \frac{1}{a^{p-n}}$

(1100) Puissance d'un produit : $(ab)^n = a^n \times b^n$ (12) Puissance d'un quotient : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Racines carrées

(1200) La racine carrée d'un nombre réel positif ou nul de a, notée $\sqrt{a}$, est **l'unique** nombre positif ou nul dont **le carré vaut a :** $(\sqrt{a})^2 = a$

(1300) Si a est un nombre réel quelconque alors $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si a est positif} \\ -a & \text{si a est négatif} \end{cases}$

On retrouve la valeur absolue de a donc $\sqrt{a^2} = |a|$

Pour tous nombres **réels positifs a et b,**

(1400) Le produit des racines carrées est la racine carré du produit **:** $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(1500) Le quotient des racines carrées est la racine carré du quotient **:** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ **avec b non nul**

(1600) Inégalité : $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$