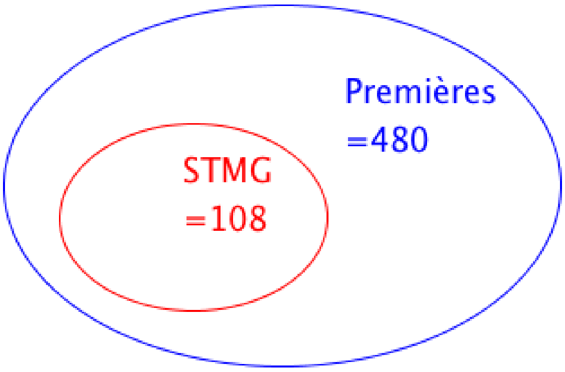
Résumé de cours – 1ère STMG

I – Généralités sur les proportions

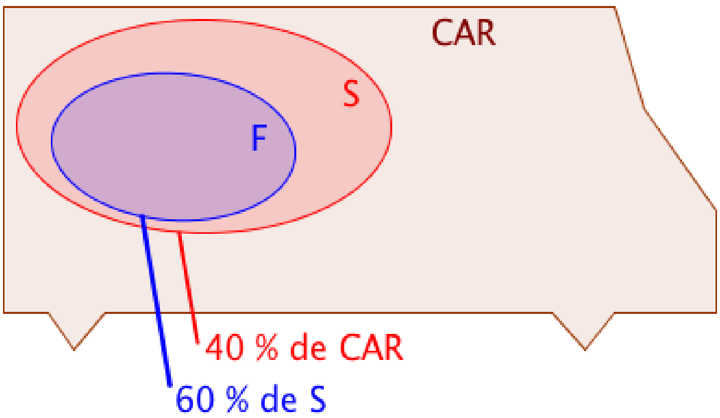
Sur les 480 élèves inscrits en classe de 1ère, 108 d'entre eux ont choisi la filière STMG.



La **population totale** des élèves de 1ère, notée *N*, est égale à 480. C'est la population de référence.
La **sous-population** des élèves de STMG, notée *n*, est égale à 108.
La **proportion** d'élèves de STMG parmi tous les élèves de première, notée *p*, est : $p = \frac{n}{N} = \frac{108}{480} = \frac{9}{40}$ = 0,225.
Cette proportion peut s'exprimer en pourcentage : *p* = 22,5 % = 0,225 x 100

II – Proportion et inclusion

Dans un car, il y a 40 % de scolaires. Et parmi les scolaires, 60 % sont des filles.



L'ensemble *F* des filles est inclus dans l'ensemble *S* des scolaires et on a : *p(F)* = 60 % de *S*.
L'ensemble *S* scolaire est inclus dans l'ensemble *CAR* de toutes les personnes dans le car et on a : *p(S)* = 40 % de CAR.

La proportion de scolaires filles dans le *CAR* est donc égale à :
60 % de 40 % = 60 % x 40 % = 0,6 x 0,4 = 0,24 = 24 %.

III – Variation absolue et variation relative

On considère deux nombres réels y_1 et y_2 strictement positifs.
La **variation absolue** de y_1 à y_2 est la différence $y_2 - y_1$.

La **variation relative**, plus souvent appelée **taux d'évolution**, de y_1 à y_2 est le quotient :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$$

Remarques

- En multipliant par 100, on obtient un **pourcentage d'évolution**.
- Un taux d'évolution positif traduit une hausse.
- Un taux d'évolution négatif traduit une baisse.

IV – Coefficient multiplicateur

Lorsqu'une quantité positive passe de y_1 à y_2, on a : $y_2 = (1+t) \times y_1$, où t est le taux d'évolution.
$c = 1+t$ est appelé **coefficient multiplicateur**.
On a aussi

$$y_1 \xrightarrow{\times(1+t)} y_2$$

$$c = \frac{y_2}{y_1}$$

Remarque

- Un coefficient multiplicateur supérieur à 1 traduit une hausse.
- Un coefficient multiplicateur inférieur à 1 traduit une baisse.

Si on a deux évolutions successives de Q à Q_1, puis de Q_1 à Q_2, alors l'évolution de Q à Q_2 a pour coefficient multiplicateur $C = C_1 \times C_2$.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\times C_1"'] \arrow[rr, bend left, "\times C_1 \times C_2"] & Q_1 \arrow[r, "\times C_2"'] & Q_2 \end{tikzcd}$$

V – Généralités sur les probabilités

On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des issues (l'univers) est noté E.

Définir une **loi de probabilité** sur E, c'est associer à chaque issue x_i un nombre p_i, positif ou nul de telle façon que $\boxed{p_1+p_2+\ldots+p_n = 1}$.
Ce nombre p_i est appelé **probabilité** de l'issue x_i.

Remarque : Pour toutes les issues, on a (une probabilité ne peut être négative, ni plus grande que 1)

$$0 \leq p_i \leq 1$$

VI – Schéma de Bernoulli

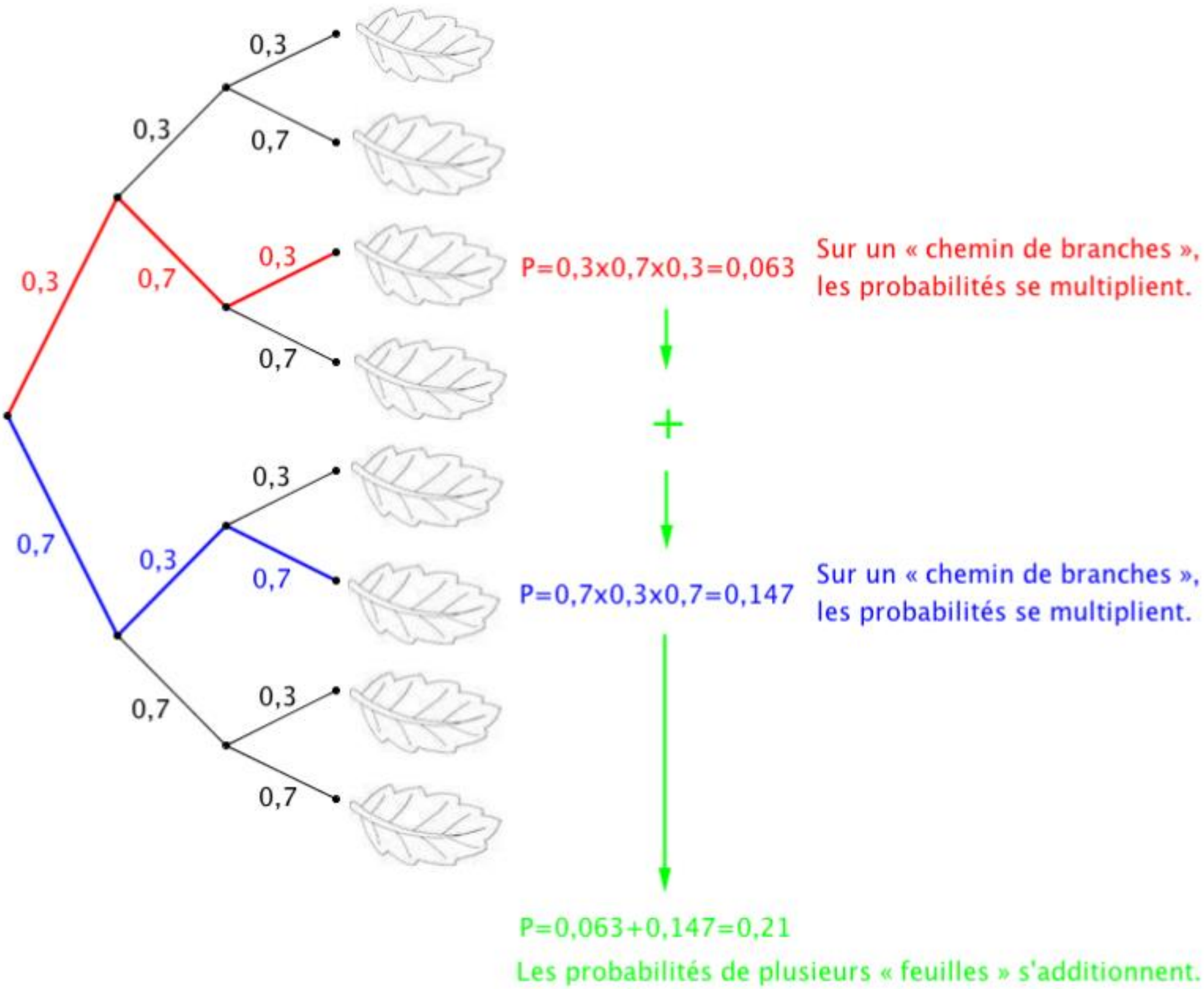
Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire comportant deux issues, l'une appelé succès S, de probabilité p, l'autre appelé échec $\overline{S}$, de probabilité q = 1-p.
On dit que deux expériences aléatoires sont **indépendantes** lorsque la réalisation de la première n'a pas d'influence sur la réalisation de la seconde.

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont la probabilité du succès est p.

Un schéma de Bernoulli est représenté par un **arbre pondéré** :

- sur chaque branche est inscrite la probabilité de l'épreuve de Bernoulli (p ou q) ;
- la probabilité d'une issue est le produit des probabilités écrites sur les branches qui y mènent.

L'exemple suivant montre un arbre typique d'un schéma de Bernoulli, et la technique permettant de calculer les probabilités à l'aide de cet arbre :



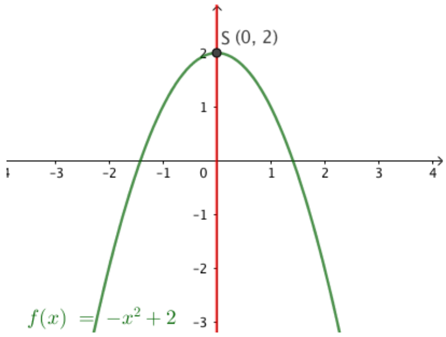
VII – Fonctions du second degré

Les fonctions de la forme $x \longmapsto ax^2$ ou $x \longmapsto ax^2 + b$ sont des **fonctions polynômes du second degré**.
Les coefficients *a* et *b* sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

- Si *a* est positif, *f* est d'abord décroissante, puis croissante : « *cuvette* ».
- Si *a* est négatif, *f* est d'abord croissante, puis décroissante : « *colline* ».

La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 s'appelle une **parabole**.

Les paraboles d'équation $y = ax^2 + b$ ont pour axe de symétrie l'axe des ordonnées et pour sommet le point de coordonnées (0 ; *b*).



VIII – Forme factorisée des fonctions du second degré

<u>Exemple :</u>
La fonction f définie par $f(x) = 2(x-2)(x+2)$ est une fonction du second degré.
En effet, elle s'écrit aussi sous la forme $x \longmapsto ax^2 + b$.

$f(x) = 2(x-2)(x+2) = 2(x^2-4) = 2x^2 - 8.$

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ sont des fonctions polynômes du second degré. On appelle cette forme la **forme factorisées**.
Les coefficients *a*, x_1 et x_2 sont des réels avec $a \neq 0$.

L'équation $f(x) = 0$ possède alors deux solutions (éventuellement égales) : $x = x_1$ et $x = x_2$ appelées les **racines** de la fonction polynôme *f*.

La droite d'équation $x = p$ avec $p = \frac{x_1+x_2}{2}$ est l'axe de symétrie de la parabole représentant la fonction *f*.

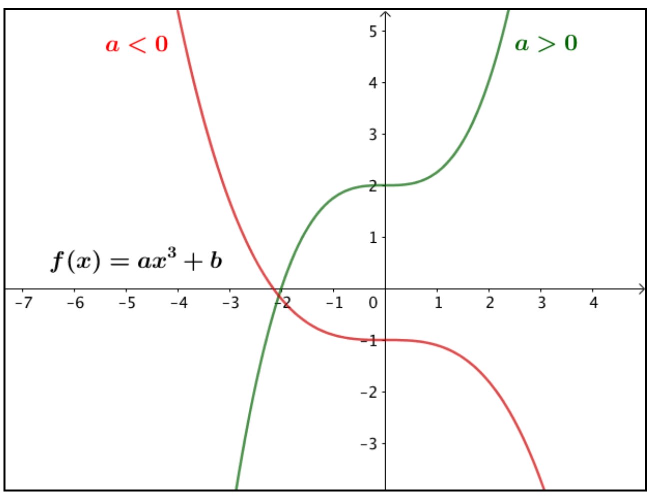
Pour trouver le signe d'une fonction du second degré sous forme factorisée, on utilise un tableau de signe combiné. Par exemple avec $2(x-3)(x+2)$:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2(x-3)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

IX – Fonctions de degré 3

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto ax^3$ ou $x \longmapsto ax^3 + b$ sont des **fonctions polynômes de degré 3**.
Les coefficients *a* et *b* sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

- Si *a* est positif, *f* est croissante.
- Si *a* est négatif, *f* est décroissante.



X – Forme factorisée des fonctions de degré 3

La fonction f définie par $f(x) = 5(x-4)(x-1)(x+3)$ est une fonction polynôme de degré 3 sous sa forme factorisée.
Si on développe l'expression de f, on obtient bien l'expression de degré 3 :
$f(x) = 5x^3 - 10x^2 - 55x + 60$

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ sont des fonctions polynômes de degré 3 dont on nomme la forme, **forme factorisée**.
Les coefficients *a*, x_1, x_2 et x_3 sont des réels avec $a \neq 0$.

De la même façon que pour le second degré, l'équation $f(x) = 0$ possède trois solutions (éventuellement égales) : $x = x_1$, $x = x_2$ et $x = x_3$ appelées les **racines** de la fonction polynôme *f*.

XI – Équations de degré 3

L'équation $x^3 = c$, avec *c* positif, possède une unique solution $\sqrt[3]{c}$.

Exemple : On veut résoudre $2x^3 - 6 = 16$
$2x^3 = 16 + 6$
$2x^3 = 22$
$x^3 = 11$

L'équation admet donc une unique solution $x = \sqrt[3]{11}$.

XII – Suites numériques

Une suite (u_n) est **croissante** (resp. **décroissante**) lorsque, pour tout n, $\mathbf{u_n} \leq \mathbf{u_{n+1}}$ (resp. $\mathbf{u_n} \geq \mathbf{u_{n+1}}$).

Une suite est généralement définie :
- par son terme de rang n, c'est-à-dire par une relation qui permet de calculer n'importe quel terme de la suite connaissant son rang ;
- par une relation de récurrence, c'est-à-dire une relation entre deux termes consécutif de la suite. Le terme initial doit être donné. Pour pouvoir calculer un terme de la suite, il faut avoir calculé tous les termes précédents.

Exemples :
- (u_n) est définie pour entier naturel n par : $u_n = 2n^2-5$ est une **relation explicite**
  Alors $u_0 = -5$, $u_1 = -3$, $u_2 = 3$, $u_{10} = 195$…
- (v_n) est définie pour entier naturel n par : $v_0 = -2$ et $v_{n+1} = -2v_n+5$ est une **relation de récurrence**
  Alors $v_1 = 9$, $v_2 = -13$, mais pour calculer v_{10} il faut calculer TOUS les termes précédents. D'où l'intérêt d'utiliser un tableur par exemple.

XIII – Suites arithmétiques

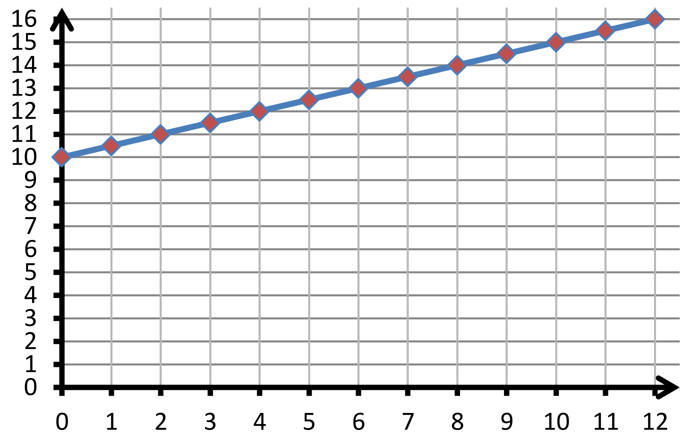
Soit r un nombre réel.
Une suite (u_n) est **arithmétique de raison r** lorsqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant r, autrement dit lorsque, pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + r$.

u_0 u_1 u_2 u_3 u_4………u_n u_{n+1}…….

+r +r +r +r +r

Si r est **positive** alors (u_n) est **croissante**. Si r est **négative** alors (u_n) est **décroissante**.

Si (u_n) est une suite arithmétique, sa représentation graphique est une droite, et réciproquement.
Le coefficient directeur de cette droite est la raison de la suite.



XIV – Suites géométriques

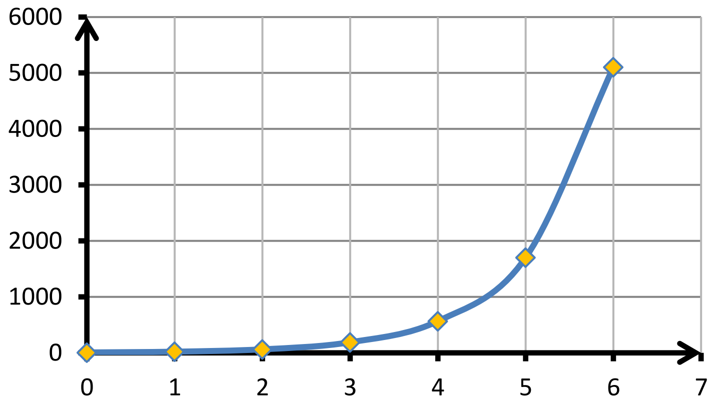
Soit q un nombre réel strictement positif.
Une suite (u_n) est **géométrique de raison q** lorsqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant par q, autrement dit lorsque, pour tout entier n, $u_{n+1} = q \times u_n$.

u_0 u_1 u_2 u_3 u_4………u_n u_{n+1}…….

×q ×q ×q ×q ×q

Si **q** $>$ **1** alors (u_n) est **croissante**. Si **q** $<$ **1** alors (u_n) est **décroissante**.

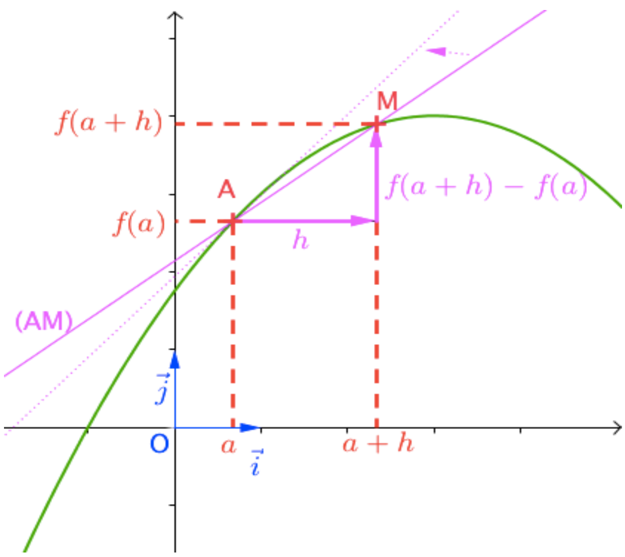
Si (u_n) est une suite géométrique de raison q strictement positive et différente de 1, sa représentation graphique est une courbe **exponentielle**.



XV – Taux de variation et nombre dérivée

Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à la **limite de** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **lorsque h tend vers 0.**
Ce coefficient directeur s'appelle le **nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.**



XVI – Dérivées des fonctions polynômes

Fonction f	Fonction dérivée f’	Fonction f	Fonction dérivée f’
$f(x) = k$	**$f'(x) = 0$**	$f(x) = ax+b$	**$f'(x) = a$**
$f(x) = x^2$	**$f'(x) = 2x$**	$f(x) = ax^2+bx+c$	**$f'(x) = 2ax+b$**
$f(x) = x^3$	**$f'(x) = 3x^2$**	$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$	**$f'(x) = 3ax^2+2bx+c$**

Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

La dérivée d’une somme est la somme des dérivées :
La dérivée de (f fois k) est multipliée la dérivée de (f) fois k :

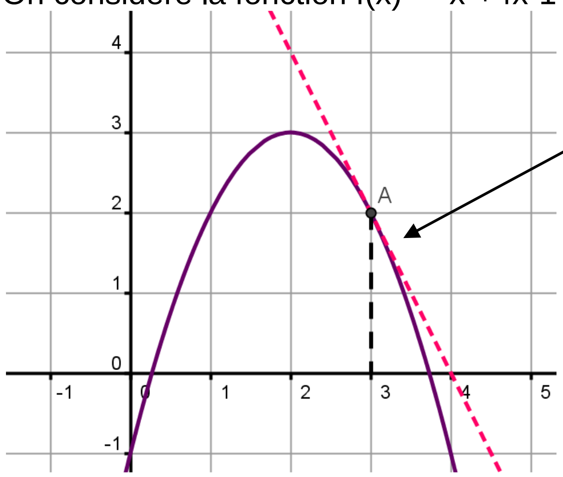
$(f+g)' = f' + g'$
$(kf)' = kf' \quad a \in \mathbb{R}$

XVII – Tangente à une fonction en un point

La **tangente** à la courbe représentative d’une fonction f au point $A(x_A\,;\,f(x_A))$ est la droite passant par le point A et de **coefficient directeur** $f'(x_A)$ (**nombre dérivée de f en x_A**).

Exemple

On considère la fonction $f(x) = -x^2+4x-1$



f’(3), le nombre dérivée de f en 3, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d’abscisse 3.

On a $f'(x) = -2x+4$, donc $f'(3) = -2$, ce qui correspond bien, graphiquement, au coefficient directeur de la droite.

XVIII – Dérivée et sens de variation

- Si **f’(x) est positive** sur un intervalle I, alors **f est croissante** sur I.
- Si **f’(x) est négative** sur un intervalle I, alors **f est décroissante** sur I.

On peut ainsi construire le tableau de signe de f’ puis celui de variation de f

Exemple :

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.
On a : $f'(x) = 2 \times 2x - 8 = 4x - 8$.
On connaît donc le signe de f’ (cours de seconde sur les fonctions affines)
On dresse alors le tableau de variations en appliquant le théorème :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘	-7	↗

En effet : $f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7$.

XIX – Probabilités conditionnelles

On appelle **probabilité conditionnelle de *B* sachant *A***, la probabilité que l'événement *B* se réalise sachant que l'événement *A* est réalisé. On la note : $P_A(B)$.

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

On choisit au hasard un patient et on considère les évènements suivants :
A : « Le patient a pris le médicament A. »
G : « Le patient est guéri. »

On choisit au hasard un patient guéri, la probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu**'il est guéri se note $P_G(A)$ et est égale à $P_G(A) = \frac{383}{674} \approx 0{,}57 = 57\ \%$. On regarde uniquement la **ligne des patients guéris**.

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

On choisit maintenant au hasard un patient traité par le médicament B, la probabilité que le patient soit guéri **sachant qu**'il a pris le médicament B se note $P_B(G)$ et est égale à $P_B(G) = \frac{291}{345} \approx 0{,}84 = 84\ \%$. On regarde uniquement la **colonne du médicament B**.

On peut aussi utiliser la formule : $P_B(G) = \frac{P(B \cap G)}{P(B)} = \frac{n(B \cap G)}{n(B)} = \frac{291}{345}$, on obtient bien le même résultat.