

Formules et Techniques mathématiques à connaître le jour de la rentrée en 1^{ère} Technologique

Maîtrise du Calcul

Écriture fractionnaire

a étant un nombre réel **non nul** :

a et $\frac{1}{a}$ sont inverses : $\frac{1}{a}$ est l'inverse de **a**, et, **a** est l'inverse de $\frac{1}{a}$ l'inverse de l'inverse de **a** est : $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

Opération avec deux écritures fractionnaires :

(1) Pour les additionner ou les soustraire elles doivent avoir le même dénominateur :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \quad \text{avec } c \neq 0 \quad \text{sinon} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{ad + cb}{bd} \quad \text{avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0$$

(2) Pour les multiplier, on multiplie les numérateurs entre eux, et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad \text{cas particulier} \quad a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d} \quad \text{avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0$$

(3) Pour les diviser il faut multiplier la première par l'inverse de la deuxième :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \quad \text{cas particulier} \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc} \quad \text{avec } b \neq 0, c \neq 0 \text{ et } d \neq 0$$

On simplifiera toujours au maximum la réponse jusqu'à l'écriture irréductible.

Puissances entières

(4) Pour tout entier naturel **n** non nul et le réel **a** : $\underbrace{a \times a \times a \dots \times a}_{n \text{ fois}} = a^n$

(5) Pour tout **a** $\neq 0$, l'inverse de **a**ⁿ se note **a**⁻ⁿ soit $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

(6) cas particuliers : $a^1 = a$ et $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (7) par convention pour **a** $\neq 0$ $a^0 = 1$

Dans les formules suivantes soient **a** et **b** des réels non nuls, **n** et **p** des entiers relatifs (ensemble Z).

(8) Produit de puissances: $a^n \times a^p = a^{n+p}$ (9) Puissance de puissances: $(a^n)^p = (a^p)^n = a^{np}$

(10) Quotient de puissances: $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} = \frac{1}{a^{p-n}}$

(11) Puissance d'un produit : $(ab)^n = a^n \times b^n$ (12) Puissance d'un quotient : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Racines carrées

(12) La racine carrée d'un nombre réel positif ou nul de **a**, notée $\sqrt{a}$, est l'**unique** nombre positif ou nul dont le carré vaut **a** : $(\sqrt{a})^2 = a$

(13) Si **a** est un nombre réel quelconque alors $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ est positif} \\ -a & \text{si } a \text{ est négatif} \end{cases}$

On retrouve la valeur absolue de **a** donc $\sqrt{a^2} = |a|$

Pour tous nombres réels positifs **a** et **b**,

(14) Le produit des racines carrées est la racine carrée du produit : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(15) Le quotient des racines carrées est la racine carrée du quotient : $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ avec **b** non nul

(16) Inégalité : $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Maîtrise du Calcul algébrique

Expression algébrique

Développer un produit : c'est transformer ce produit en somme

Factoriser une somme : c'est transformer cette somme en produit

(17) **Distributivité simple** $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

(18) **Double distributivité** $(a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Attention à la règle des signes pour une multiplication

Identités remarquables (19) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (20) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
(21) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Équations

Résoudre une équation d'inconnue x c'est déterminer **toutes** les valeurs de x pour lesquelles **l'égalité est vérifiée**. Cet ensemble de valeurs est **l'ensemble des solutions** de l'équation. On peut le noter S_x .

Deux équations sont dites **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.

L'équivalence se symbolise par une double flèche : $\Leftrightarrow$

(22) si $a \neq 0$ $ax + b = c$ $\Leftrightarrow ax + b - b = c - b$ $\Leftrightarrow ax = c - b$ $\Leftrightarrow \frac{ax}{a} = \frac{c - b}{a}$ $\Leftrightarrow x = \frac{c - b}{a}$ donc $S_x = \left\{ \frac{c - b}{a} \right\}$	Lorsqu'on ajoute ou retranche un même nombre aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente. Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une équation par un même nombre non nul, on obtient une équation équivalente.
--	--

(23) Un produit est **nul** si et seulement si **un des facteurs** est **nul** soit : $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$

(24) **Le carré** d'une quantité est **nul** si et seulement si la quantité est nulle $A(x)^2 = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$

(25) **Un quotient** est **nul** si et seulement si **le numérateur est nul et le dénominateur n'est pas nul**
soit : $\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ et $B(x) \neq 0$ on parle de valeur(s) interdite(s)

(26) $x^2 = k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } k > 0 \text{ alors } x = \sqrt{k} \text{ ou } x = -\sqrt{k} \\ \text{si } k = 0 \text{ alors } x = 0 \\ \text{si } k < 0 \text{ alors aucune solution réelle} \end{cases}$ k étant un nombre réel.

(27) $\sqrt{x} = k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } k \geq 0 \text{ alors } x = k^2 \\ \text{si } k < 0 \text{ alors aucune solution réelle} \end{cases}$ k étant un nombre réel.

(28) $\frac{1}{x} = k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } k \neq 0 \text{ alors } x = \frac{1}{k} \\ \text{si } k = 0 \text{ alors aucune solution réelle} \end{cases}$ k étant un nombre réel.

Inéquations

Résoudre une inéquation d'inconnue x c'est déterminer **toutes** les valeurs de x pour lesquelles **l'inégalité est vérifiée**. Cet ensemble de valeurs est **l'ensemble des solutions** de l'inéquation, c'est souvent un intervalle

$a < b$ $\Leftrightarrow a + c < b + c$ $\Leftrightarrow a - d < b - d$ si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$	(29) Lorsqu'on ajoute ou retranche un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité équivalente c-à-d le sens de cette inégalité ne change pas (30) Ajouter membre à membre deux inégalités de même sens donne une inégalité de même sens
$a < b$ et $c > 0$ $\Leftrightarrow a \times c < b \times c$ $a < b$ et $c < 0$ $\Leftrightarrow a \times c > b \times c$	Lorsqu'on multiplie ou divise : (31) par un même nombre strictement positif les deux membres d'une inégalité, on ne change pas le sens de cette inégalité (32) par un même nombre strictement négatif les deux membres d'une inégalité, on change le sens de cette inégalité

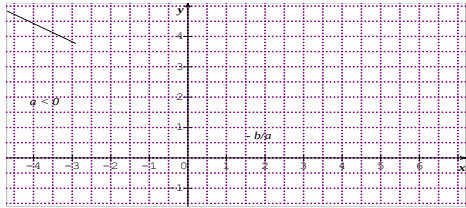
idem avec $>$, $\leq$, $\geq$

Fonctions

(33) **Fonction affine** $f : x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$ définie sur $\mathbb{R}$

$f(x) = 0$ admet une unique solution le réel $-\frac{b}{a}$ solution de l'équation $ax + b = 0$

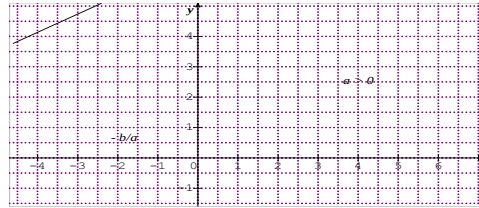
si $a < 0$ alors f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$



Déduction du signe de $ax + b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax + b$	+	0	-

si $a > 0$ alors f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$



Déduction du signe de $ax + b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax + b$	-	0	+

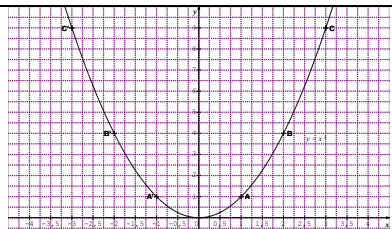
(34) **Fonction carré** $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$
strictement décroissante sur l'intervalle $] -\infty ; 0]$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$		↓ 0	

Deux nombres positifs sont rangés dans **le même ordre** que leur carré : si $0 \leq a < b$ alors $a^2 < b^2$
 Deux nombres négatifs sont rangés dans **l'ordre contraire** de leur carré : si $a < b \leq 0$ alors $a^2 > b^2$.

la courbe représentative de la fonction **carré** est appelée **une parabole (P)** de **sommet l'origine O** et d'équation $y = x^2$



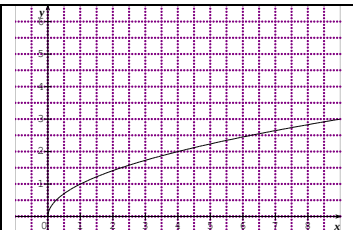
(35) **Fonction racine carrée** $f : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0 ; +\infty[$

strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$		↗ +

Deux nombres et leurs deux racines carrées sont ordonnés dans le même ordre

la courbe représentative de la fonction **racine carrée** a pour équation $y = \sqrt{x}$.



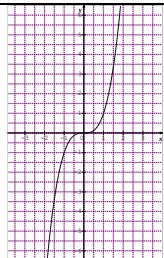
(36) **Fonction cube** $f : x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$

strictement croissante sur $] -\infty ; +\infty [$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = x^3$		↗ +

Deux nombres et leurs deux cubes sont ordonnés dans le même ordre

la courbe représentative de la fonction **cube** a pour équation $y = x^3$



(37) **Fonction inverse** $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

définie sur $\mathbb{R}^* =] -\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$.

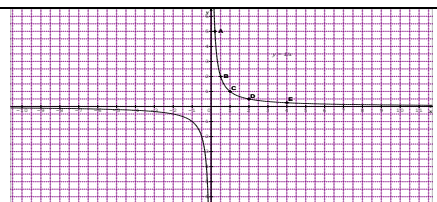
strictement décroissante sur $] 0 ; +\infty [$ et sur $] -\infty ; 0 [$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$		 	

Deux nombres positifs sont rangés dans **l'ordre contraire** que leur inverse : si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Deux nombres négatifs sont rangés dans **l'ordre contraire** de leur inverse: si $a < b < 0$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

la courbe représentative de la fonction **inverse** est appelée **une hyperbole** d'équation $y = \frac{1}{x}$



Statistiques

(38) **La moyenne pondérée**, notée $\bar{x}$, est le nombre réel défini par : $\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \dots + n_p x_p}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_p}$

(39) ou par $\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_p x_p$ si on a les fréquences. **Même unité** que le caractère étudié.

(40) **La variance** d'une série statistique est le **réel**, noté **V**, tel que

$$V = \frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p (x_p - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} \text{ ou } V = f_1 (x_1 - \bar{x})^2 + f_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_p (x_p - \bar{x})^2 \text{ Elle n'a pas d'unité}$$

(41) **L'écart-type** d'une série statistique est le **réel**, noté **σ** , tel que

$$\sigma = \sqrt{V} \text{ racine carrée de la variance } \Leftrightarrow \sigma = \sqrt{\frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p (x_p - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}}$$

Il a la **même unité** que le caractère étudié.

(42) La moyenne et l'écart-type prennent en compte toutes les valeurs de la série et sont, de ce fait, influencées par les valeurs extrêmes. Plus l'écart-type est grand, plus les valeurs sont dispersées et moins la moyenne représente de façon significative la série

(43) La **médiane**, qui a la **même unité** que le caractère, souvent notée **m_e** , est la valeur qui partage la série ordonnée en **deux sous séries de même effectif 50 %** avant, **50 %** après.

(44) Le **premier quartile Q_1** est le **plus petit nombre de la série tel qu'au moins 25 % des valeurs sont inférieures ou égales à ce nombre**.

Le **troisième quartile Q_3** est le **plus petit nombre de la série tel qu'au moins 75 % des valeurs sont inférieures ou égales à ce nombre**

(45) **L'écart interquartile** est la différence **$Q_3 - Q_1$** **L'intervalle interquartile** est **$[Q_1 ; Q_3]$**

(46) La médiane et l'écart interquartile sont déterminés par le nombre de valeurs de la série et non par la grandeur de ces valeurs : ils ne sont donc pas influencés par les valeurs extrêmes, qui peuvent parfois être trompeuses

Probabilité

(47) **Une expérience** est dite **aléatoire**, lorsqu'elle a **plusieurs issues** ou résultats possibles et que l'on **ne peut prévoir laquelle** de ces issues **sera réalisée**. **L'ensemble de toutes ces issues**, s'appelle **l'univers**. On le note souvent **Ω** . **Un événement** est une **partie** (ou un sous-ensemble) l'univers **Ω** .

Un événement **élémentaire** est un événement formé **d'une seule** issue.

Les événements A et B sont dits **incompatibles** (ou **disjoints**) lorsqu'ils n'ont aucune issue en commun c-à-d qu'ils ne peuvent être réalisés **simultanément**

(48) A et B sont **incompatibles** si et seulement si **$A \cap B = \emptyset$** .

Soit l'univers **$\Omega = \{ \text{issue 1, issue 2, } \dots, \text{issue i, } \dots, \text{issue n} \}$**

(49) Définir **une loi de probabilité** sur l'univers **Ω** , c'est associer, à chaque issue **i**, un nombre **p_i** , **positif ou nul** telle que **la somme de tous les p_i soit égale à 1**. On résume la loi de proba. avec **$0 \leq p_i \leq 1$**

issue	issue 1	issue 2			issue i			issue n	Total
probabilité	p_1	p_2			p_i			p_n	1

(50) **$P(\Omega) = 1$** car toutes les issues le réalisent. **$P(\emptyset) = 0$** car aucune issue ne le réalise.

(51) **La probabilité d'un événement A**, notée **$P(A)$** , est égale à la **somme** des probabilités des issues qui le réalisent (qui constituent A). **$0 \leq P(A) \leq 1$** pour tout événement A de **Ω** .

(52) **L'événement contraire** de l'événement A, est formé de **toutes les issues de Ω qui ne réalisent pas A** (qui ne sont pas dans A). On le note **$\bar{A}$** . **$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$** ou **$P(A) = 1 - P(\bar{A})$** .

(53) Si **toutes les issues** d'un univers **Ω** ont la **même probabilité** de se réaliser, alors on est en situation d'**équiprobabilité**. Dans ce cas si **Ω contient n issues** alors la probabilité de chaque issue est **$\frac{1}{n}$**

(54) Dans cette situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues dans A}}{\text{nombre total d'issues de } \Omega} \text{ ou } = \frac{\text{nombre de cas favorables pour A}}{\text{nombre total de cas}}$$

(55) A et B, 2 événements de **Ω** , **$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$**

Pourcentages et évolutions

On note V_D la valeur de départ et V_A la valeur d'arrivée d'une quantité

(56) Le coefficient multiplicateur, CM , est le nombre qui multiplié par la valeur de départ donne la valeur d'arrivée : $CM \times V_D = V_A$ il n'a pas d'unité

si $CM > 1$ alors il s'agit d'une hausse, si $CM < 1$ c'est une baisse, et, si $CM = 1$ c'est stable

(57) Augmenter une quantité de $t\%$ c'est la multiplier par $(1 + \frac{t}{100}) = CM$

(58) Diminuer une quantité de $t\%$ c'est la multiplier par $(1 - \frac{t}{100}) = CM$

(59) La variation absolue de V_D à V_A est le nombre $V_{Abs} = V_A - V_D$, même unité que V_D

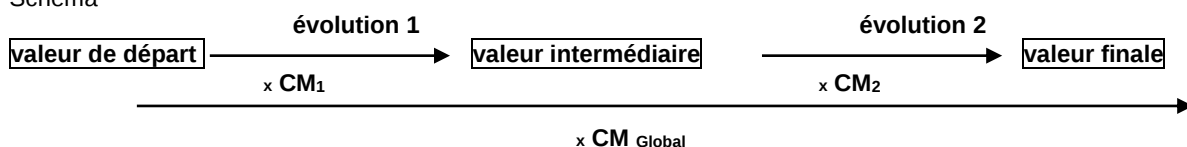
(60) La variation relative de V_D à V_A est le nombre : $V_{Rel} = \frac{V_A - V_D}{V_D}$, pas d'unité

on parle aussi de taux d'évolution noté t

(61) Le coefficient multiplicateur global, CM_{Global} , est le produit des coefficients multiplicateurs CM_1 et CM_2 associés à chaque évolution : $CM_{Global} = CM_1 \times CM_2$

(62) t_{Global} le taux d'évolution global permettant de passer directement de la valeur de départ à la valeur finale est donné par : $t_{Global} = (CM_{Global} - 1)$

Schéma



(63) Pour calculer le taux d'évolution global, on ne peut pas additionner les pourcentages d'évolution. Une hausse de $t\%$ suivie d'une baisse de $t\%$ ne redonne pas la valeur de départ.

(64) Le taux d'évolution réciproque t_R , correspondant à coefficient réciproque CM_R permet de revenir à la valeur de départ

On a $CM \times CM_R = 1$ donc $CM_R = \frac{1}{CM}$ et $t_R = (CM_R - 1)$ soit $t_R = (\frac{1}{CM} - 1)$

Schéma

